السلم لتصحيح مقرر تمثيلات الزمر والجبور
السنة الرابعة رياضيات (جبر)
الفصل الثاني ٢٠١٦ - ٢٠١٧

السؤال الأول. ($n$ ١٢ درجة)

ليكن $x, y \in V$ عندئذ $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i ; \; y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ حيث $\alpha_i, \beta_i \in F$ لأجل كل $1 \le i \le n$، إن $T_\sigma$ تطبيق لأنه إذا كان $x = y$ فإن $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) e_i = 0$ ومنه فإن $\alpha_i = \beta_i$ وذلك لأجل كل $1 \le i \le n$ وبما أن $\sigma(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ فإن $\alpha_{\sigma(i)} = \beta_{\sigma(i)}$ ومنه يكون

$$T_\sigma(x) = T_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} = T_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) = T_\sigma(y)$$

كما أن $T_\sigma$ هو مؤثر خطي لأن

$$T_\sigma(x+y) = T_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i\right) =$$

$$= \sum \alpha_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} + \sum \beta_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} = T_\sigma(x) + T_\sigma(y)$$

وأيضاً أياً كان $\lambda \in F$ فإن

$$T_\sigma(\lambda x) = T_\sigma\left(\sum (\lambda \alpha_i) e_i\right) =$$

$$= \sum \lambda \alpha_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} = \lambda \sum \alpha_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} = \lambda T_\sigma(x)$$

أيضاً إن $T_\sigma$ متباين لأنه إذا كان $T_\sigma(x) = T_\sigma(y)$ فإن

$$\sum \alpha_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} = \sum \beta_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}$$

وبما أن $\sigma \in S_n$ نجد أن $T_\sigma^{-1} : V \to V$ مؤثر خطي وبالتالي فإن

$$T_\sigma^{-1}\left(\sum \alpha_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}\right) = T_\sigma^{-1}\left(\sum \beta_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}\right)$$

$$\sum \alpha_{\sigma^{-1}\sigma(i)} e_{\sigma^{-1}\sigma(i)} = \sum \beta_{\sigma^{-1}\sigma(i)} e_{\sigma^{-1}\sigma(i)} \,,\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

ومنه $x = y$، وأخيراً إن $T_\sigma$ غامر، لأنه إذا كان $z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i \in V$ حيث $\gamma_i \in F$، ولما كان $\sigma \in S_n$ فإن $z' = \sum \gamma_{\sigma^{-1}(i)} e_{\sigma^{-1}(i)} \in V$، وحيث

$$T_\sigma(z') = T_\sigma\left(\sum \gamma_{\sigma^{-1}(i)} e_{\sigma^{-1}(i)}\right) = \sum \gamma_{\sigma\sigma^{-1}(i)} e_{\sigma\sigma^{-1}(i)} = \sum \gamma_i e_i = z$$

مما سبق نجد أن $T_\sigma$ هو مؤثر خطي متباين وغامر للفضاء $V$.

السؤال الثاني. ($٨ + ٨ + ٦ = ٢٢$ درجة)

- لتوضيح التمثيل $\rho : G \to GL_F(V)$ أنه أولي إذا لم يكن يمتلك فضاءات جزئية $G$ - مستقرة سوى $\{0\}$ و $V$.

درجات. نعلم أن $Ker(T)$ فضاء جزئي في $V$، لنبرهن على أنه $G$ - مستقر، ليكن $v \in Ker(T)$ عندئذ فإن

$$(T\rho(g))(v) = T(\rho(g)(v)) = \rho'(g) T(v) = \rho'(g)(0) = 0$$

درجات. ومنه نجد أن $\rho(g)(Ker(T)) \subseteq Ker(T)$ ولما كان التمثيل $\rho$ أولياً عندئذ إما $Ker(T) = 0$ أو أن $Ker(T) = V$، إذا كان $Ker(T) = V$، عندئذ فإن $T = 0$ وهو المطلوب، لنفرض أن $Ker(T) = 0$ عندئذ يكون $T$ متباين،

درجات. من جهة أخرى، نعلم أن $Im(T)$ فضاء جزئي في $V'$ لنبرهن على أنه $G$ - مستقر، ليكن $v \in Im(T)$، عندئذ يوجد $w \in V$ بحيث $v = T(w)$ ومنه أياً كان $g \in G$ فإن

$$\rho'(g)(v) = \rho'(g) T(w) = T(\rho(g)(w)) \in Im(T)$$

ولما كان التمثيل $\rho'$ أولياً، نجد أنه إما $Im(T) = 0$ أو $Im(T) = V'$، ولما كان $T \neq 0$ فإن $Im(T) \neq 0$ وهذا يعني أن $Im(T) = V'$ وبالتالي فإن $T$ غامر.

السؤال الثالث. ($١٥ + ١٥ = ٣٠$ درجة)

١- لأجل كل $x \in X$ لنعرف التطبيق $e_x : X \to F$ بالشكل الآتي: أياً كان $y \in X$ فإن

$$e_x(y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

نجد أن الصيغة $e_x$ تطبيقاً ومنه نجد أنه لأجل كل $x \in X$ فإن $e_x \in F(X)$

لنبرهن على أن المجموعة $S = \{e_x \; ; \; x \in X\}$ تشكل قاعدة للفضاء $F(X)$ فوق الحقل $F$.

$f \in F(X)$ ، عندئذٍ أياً كان $y \in X$ فإن $f(y) \in F$ ، ومنه نجد أن
$f(y) = f(y)\cdot 1 = f(y)\cdot e_y(y)$ . فنجد أن $f(y) = \alpha_y$
$f(y) = f(y)\, e_y(y) = \alpha_y\, e_y(y) =$
$= \sum_{x \in X} \alpha_y\, e_x(y) = \sum_{x\in X} (\alpha_y e_x)(y) = (\sum_{x\in X} \alpha_y e_x)(y)$
ومنه نجد أن $f = \sum_{x\in X} \alpha_y e_x$ ، وهذا يبين أن المجموعة $S = \{e_x ; x \in X\}$ تولد الفضاء $F(X)$ فوق $F$

لنبرهن على أن المجموعة $S$ مستقلة خطياً فوق $F$. لنعتبر $\alpha_x \in F$ عناصر من الحقل $F$
تحقق $\sum_{x\in X} \alpha_x e_x = 0$ ومنه نجد أنه أياً كان $y \in X$ فإن
$(\sum_{x\in X} \alpha_x e_x)(y) = 0 \Rightarrow \sum_{x\in X} (\alpha_x e_x)(y) = 0 \Rightarrow$
$\sum_{x\in X} \alpha_x e_x(y) = 0$ وذلك لأجل كل $y \in X$ ومنه نجد أن $\alpha_y = 0$
وبالتالي فإن $F$ خطياً فوق $F$ وهذا يبين أن المجموعة $S$ مستقلة
تشكل قاعدة للفضاء $F(X)$

٢- لنفرض أن $G \times X \to X$ تأثير الزمرة $G$ على المجموعة $X$. لنعرف العلاقة $\rho : G \to GL(F(X))$ بالشكل التالي: أياً كان $g \in G$ فإن $\rho(g) : F(X) \to F(X)$
حيث أياً كان $f \in F(X)$ فإن $\rho(g)(f) : X \to F$ وأياً كان $x \in X$ نضع
$\rho(g)(f)(x) = f(g^{-1} * x)$ إن $\rho$ تطبيق لأنه أياً كان $g_1, g_2 \in G$ بحيث
$g_1 = g_2$ نجد أن $g_1^{-1} = g_2^{-1}$ ومنه أياً كان $x \in X$ فإن $(g_1^{-1}, x) = (g_2^{-1}, x)$
وبالتالي يكون $g_1^{-1} * x = g_2^{-1} * x$ ومنه أياً كان $f \in F(X)$ فإن
$f(g_1^{-1} * x) = f(g_2^{-1} * x)$ وبالتالي يكون $\rho(g_1)(f)(x) = \rho(g_2)(f)(x)$ وذلك
أياً كان $x \in X$ ، أي أن $\rho(g_1)(f) = \rho(g_2)(f)$ وذلك أياً كان $f \in F(X)$
ومنه يكون $\rho(g_1) = \rho(g_2)$ ، وهذا يبين أن $\rho$ تطبيق، وهو تشاكل زمري لأنه
أياً كان $g_1, g_2 \in G$ عندئذٍ فإن $g_1 \cdot g_2 \in G$ وبالتالي فإن $(g_1 \cdot g_2)^{-1} \in G$

١٥ درجة

وأن $(g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}$ ومنه أياً كان $x \in X$ فإن
$(g_1 \cdot g_2)^{-1} * x = (g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}) * x = g_2^{-1} * (g_1^{-1} * x)$
ومنه أياً كان $f \in F(X)$ فإن $f((g_1\cdot g_2)^{-1} * x) = f(g_2^{-1} * (g_1^{-1} * x))$
وبالتالي فإن
$\rho(g_1 \cdot g_2)(f)(x) = f((g_1 g_2)^{-1} * x) =$
$= f(g_2^{-1} * (g_1^{-1} * x)) = \rho(g_2)(f)(g_1^{-1} * x) =$
$= \rho(g_1)(\rho(g_2)(f)(x)) = \rho(g_1)\,\rho(g_2)(f)(x)$
وذلك أياً كان $x \in X$ ومنه $\rho(g_1 \cdot g_2)(f) = \rho(g_1)\cdot\rho(g_2)(f)$ وذلك أياً كان
$f \in F(X)$ ومنه $\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ وهذا يبين أن $\rho$ تمثيلاً للزمرة $G$.

## السؤال الرابع: (١٢ + ١٢ = ٢٤) درجة

١- لنفرض أن $A(S)$ زمرة التباديل للمجموعة $S$ ولنفرض أيضاً أن $G \times S \to S$ تأثيراً للزمرة $G$ على المجموعة $S$. لنعرف العلاقة $T : G \to A(S)$ بالشكل التالي: أياً كان
$g \in G$ نضع $T(g) = T_g$ ، إن $T_g$ هو تبديل للمجموعة $S$ ، لنبرهن على أن $T$ تطبيق
ليكن $g_1, g_2 \in G$ بحيث $g_1 = g_2$ عندئذٍ أياً كان $s \in S$ فإن $g_1 * s = g_2 * s$
أي أن $T_{g_1}(s) = T_{g_2}(s)$ وبالتالي يكون $T_{g_1} = T_{g_2}$ ، أي أن $T(g_1) = T(g_2)$
كما أن $T$ تشاكل لأنه $T(g_1 \cdot g_2) = T_{g_1 \cdot g_2}$ وأياً كان $s \in S$ فإن
$T_{g_1 \cdot g_2}(s) = (g_1 \cdot g_2) * s = g_1 * (g_2 * s) = T_{g_1}(g_2 * s) = T_{g_1}(T_{g_2}(s))$
$= T_{g_1} T_{g_2}(s)$
ومنه نجد أن $T_{g_1 \cdot g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2}$ وبالتالي يكون $T(g_1 \cdot g_2) = T(g_1)\cdot T(g_2)$
أي أن $T$ هو تشاكل زمري وبالتالي $T$ هو تمثيل للزمرة $G$.

١٢ درجة

٢- لنفرض أن $\rho : G \to A(S)$ تمثيلاً للزمرة $G$ على المجموعة $S$. لنعرف العلاقة $* : G \times S \to S$ بالشكل التالي: أياً كان $g \in G$ وأياً كان $s \in S$
نضع $g * s = \rho(g)(s)$ فنجد أن $*$ تطبيق لأنه إذا كان

ليكن $(g_1, s_1), (g_2, s_2) \in G \times X$ حيث $(g_1, s_1) = (g_2, s_2)$ عندئذ فإن $g_1 = g_2$ ، $s_1 = s_2$ ومنه

$$g_1 * s_1 = \rho(g_1)(s_1) = \rho(g_2)(s_2) = g_2 * s_2$$

وإذا كان $s \in S$ فإن

$$e * s = \rho(e)(s) = I_s(s) = s$$

وإذا كان $g_1, g_2 \in G$ فإن

$$(g_1 \cdot g_2) * s = \rho(g_1 g_2)(s) = (\rho(g_1) \cdot \rho(g_2))(s)$$
$$= \rho(g_1)(\rho(g_2)(s)) = \rho(g_1)(g_2 * s) = g_1 * (g_2 * s)$$

مما سبق نجد أن $*$ هو تأثير للزمرة $G$ على المجموعة $S$.

السؤال الخامس: 1) د1)

ليكن $g_1, g_2 \in G$ حيث $g_1 = g_2$ عندئذ فإن $g_1^{-1} = g_2^{-1}$ ومنه فإن $\rho(g_1^{-1}) = \rho(g_2^{-1})$ حيث $\rho(g_1^{-1}) : V \to V$ هو تحويل خطي على $V$، لنفرض أن $\rho(g_1^{-1})^* : V^* \to V^*$ المؤثر الثنوي للمؤثر $\rho(g_1^{-1})$

عندئذ إذا كان $f \in V^*$ وإذا كان $v \in V$ فإن

$$\rho^*(g_1)(f)(v) = (\rho(g_1^{-1})^*)(f)(v) =$$
$$= f(\rho(g_1^{-1})(v)) = f(\rho(g_2^{-1})(v)) =$$
$$= (\rho(g_2^{-1}))^*(f)(v) = \rho^*(g_2)(f)(v)$$

ومنه نجد أن $\rho^*(g_1) = \rho^*(g_2)$ ، لنبرهن أن $\rho^*$ تشاكل زمري، إن

$$\rho^*(g_1 \cdot g_2) : V^* \to V^*$$

وإذا كان $f \in V^*$ ، $v \in V$ فإن

$$\rho^*(g_1 g_2)(f) : V \to K \in V^*$$
$$\rho^*(g_1 g_2)(f)(v) = (\rho(g_1 g_2)^{-1})^*(f)(v) =$$
$$= f(\rho(g_1 g_2)^{-1}(v)) = f(\rho(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})(v)) =$$
$$= f(\rho(g_2^{-1}) \cdot \rho(g_1^{-1})(v)) = f(\rho(g_2^{-1}))(\rho(g_1^{-1})(v))$$
$$= \rho(g_2^{-1})^*(f)(\rho(g_1^{-1})(v)) = \rho(g_1^{-1})^*(\rho(g_2^{-1})^*(f))(v)$$
$$= \rho(g_1^{-1})^* \rho(g_2^{-1})^* (f)(v)$$

وذلك أياً كان $f \in V^*$ وأياً كان $v \in V$ ومنه نجد أن

$$\rho^*(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1^{-1})^* \rho(g_2^{-1})^* = \rho^*(g_1) \rho^*(g_2)$$